第８講　熱力学Ⅱ

1

次の文章を読んで，[　　　]に適した式か値を，{　　　}からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，[[　　　]]はすでに[　　　]で与えられたものと同じものを表す。また，問１，問２については，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図１に示すように，ピストン W と仕切板 D によって内部の領域を分けられたシリンダーがある。シリンダーは固定されており，ピストン W と仕切板 D は摩擦なしに動くことができる。ピストン W と仕切板 D の間を領域 A とし，仕切板 D とシリンダー右端の間を領域 B とする。領域 A と領域 B には，異なる理想気体がそれぞれ密閉されている。定積モル比熱を C_V，気体定数を R とすると，領域 A と領域 B に密閉されている気体の $\dfrac{C_V}{R}$ の値は，それぞれ $\dfrac{3}{2}$ と $\dfrac{5}{2}$ である。シリンダーの外壁とピストン，仕切板は，すべて断熱材でできている。領域 B の気体は，シリンダーの右端に取り付けられた温度調整器 C によって加熱または冷却される。領域 B の気体全体の温度は，すみやかに温度調整器の設定温度になるものとする。なお，温度調整器の電源を切ると，領域 B は断熱環境となる。さらに，シリンダー内部にはストッパー S が設けられており，仕切板がストッパーより右側に動くことはない。仕切板がストッパーの位置にあるときの領域 B の体積は V_0 である。ピストン，仕切板，ストッパー，温度調整器の体積は無視できるものとする。また，ピストンの左側は常に大気圧となっており，その値は P_0 である。

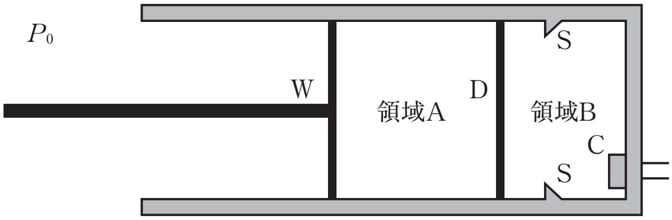


図１

最初，領域 A の気体の圧力，体積，温度は，それぞれ P_0，$2V_0$，T_0 であり，領域 B の気体の圧力，体積，温度は，それぞれ P_0，$\dfrac{3}{2}V_0$，$\dfrac{3}{2}T_0$ であった。この状態を初期状態とする。このとき領域 A の気体と，領域 B の気体のモル数はそれぞれ[あ]と[い]である。初期状態から以下の(1)〜(4)に示す操作を行った。

(1)　温度調整器で領域 B の気体を加熱し，温度を $\dfrac{3}{2}T_0$ から $2T_0$ までゆっくりと上昇させた。このとき，領域 B の気体の内部エネルギーの変化は[う]であり，領域 B の気体がした仕事は[え]であるから，領域 B の気体が温度調整器から吸収した熱量は[お]である。

＜ Note ＞

理想気体の断熱変化では，(圧力)×(体積)$^{\gamma}$ は一定である。ここで γ は比熱比と呼ばれ，定圧モル比熱を C_P とすると，$\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}$ で定義される。理想気体では，C_P と C_V の差(C_P-C_V)が［　か　］に等しいことを考慮すれば，領域Ａの気体の比熱比は［　き　］であり，領域Ｂの気体の比熱比は［　く　］である。

なお，以下の解答では，領域Ａの気体の比熱比［　き　］を α，領域Ｂの気体の比熱比［　く　］を β と表記せよ。

(2)　(1)で行った操作に引き続き，温度調整器で領域Ｂの気体の温度を $2T_0$ に保ちながら，ピストンＷに外力を加え，ゆっくりと右方へ押し込んでいった。仕切板Ｄがストッパー Ｓに接触したとき，ピストンＷを押し込む操作を中断し，そのままの状態で保持した。このとき領域Ａの気体の体積は［　け　］である。

問１　(2)で行った操作で，外力が気体にした仕事を求めよ。ただし，領域Ｂの気体が温度調整器を通じて外部に放出した熱量を Q とする。導出の過程もあわせて示せ。

(3)　(2)で行った操作に引き続き，さらにピストンＷを押し込んでいくと，領域Ａの気体の体積が V_0 となった。この時点でピストンＷを押し込む操作を中断し，そのままの状態で保持した。このとき，領域Ａの気体の圧力は［　こ　］である。

問２　(2)で行った操作の開始から(3)で行った操作の終了までの間において，領域Ａの気体と領域Ｂの気体の状態変化を，横軸を体積，縦軸を圧力として図示せよ。また，領域Ｂの気体がされた仕事に相当する領域を図中に斜線で示せ。ただし，各操作の過程で状態の変化があるときは，変化の進む方向に矢印を付し，その変化の始状態と終状態における体積と圧力を図中に記入せよ。

(4)　(3)の操作に引き続き，温度調整器で領域Ｂの気体を加熱した。仕切板Ｄがストッパーから離れかけた瞬間に温度調整器の電源を切り，領域Ｂを断熱環境とした。その後，領域Ａの気体の圧力が大気圧 P_0 に等しくなるまで，ゆっくりとピストンＷを左方に移動させた。このとき，領域Ｂの気体の体積は［　さ　］であり，そのときの領域Ａの気体の体積｛し：①より大きい　②より小さい　③と等しい｝。また，この過程で領域Ａの気体のした仕事は，領域Ｂの気体がした仕事｛す：①より大きい　②より小さい　③と等しい｝。気体の仕事に関するこのような性質は，熱機関における効率を考える上で重要である。

＜ Note ＞

2

次の文を読んで，□に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。なお，文中に挿入された問１については，解答欄にグラフを描け。

図１のように，一端が壁Ａで閉じられた，断面積 S のシリンダーがあり，摩擦なしで動くことができるピストンＢ，Ｃによって３つの空間領域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲに分けられている。領域Ⅰには電気抵抗 r のニクロム線でできたヒーターがあり，内部抵抗を無視できる起電力 V の電池とスイッチＫでできた外部の回路に導線でつながれている。ピストンＢにはごく細い通気口が開けられているが，最初は弁Ｄによって閉じられている。ピストンＢ, Ｃは，フックの法則に従う自然の長さが L のばねで結ばれている。シリンダー内には，壁Ａから距離 $4a$ の位置にストッパー N_1 が，さらに N_1 からばねの自然長 L とピストンＢ，Ｃの厚さをあわせた距離の位置にストッパー N_2 が設けられ，ピストンを停止できるようになっている。ただし，L は $2a$ より大きい。また，シリンダーとピストンはともに断熱材でできており，ストッパー，ばね，弁，通気口，ヒーターおよび導線の体積は，いずれも無視できるものとする。なお，大気圧を P_0 とする。

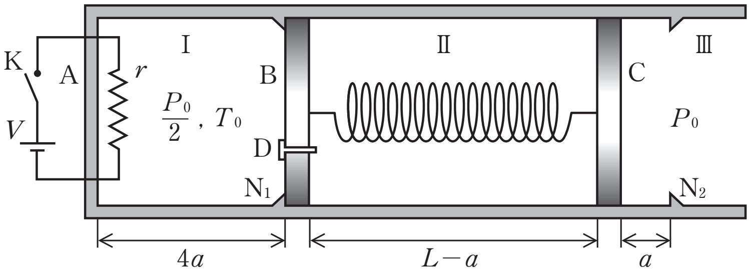


図１

最初は，領域Ⅱは真空で，領域Ⅰには単原子分子理想気体が入れられ，その圧力と温度がそれぞれ $\frac{P_0}{2}$，T_0 であった。また，領域Ⅲは常に大気圧 P_0 の外気と通じている。図１に示したように，この状態でピストンＢはストッパー N_1 に接触して停止し，ピストンＣはストッパー N_2 から距離 a の位置で停止していた。このことから，ばね定数は **イ** であることが分かる。その後，以下のように過程(1)から(4)の順にシリンダーの状態を変化させた。

(1)　スイッチＫを閉じて回路に電流を流すと，領域Ⅰの気体の温度はゆっくりと上昇し，ある時刻にピストンＢがストッパー N_1 を離れ始めた。このときの領域Ⅰの気体の温度は **ロ** であった。電池により供給されたエネルギーがすべて気体に吸収されたとすれば，この時刻はスイッチＫを閉じてから時間 **ハ** の後である。

(2)　その後，ピストンＢはゆっくりと移動し，領域Ⅰの気体の温度が **ニ** になると，ピストンＣがストッパー N_2 に接触し停止した。この過程で領域Ⅰの気体が吸収した熱量は **ホ** である。

＜ Note ＞

(3)　さらにピストンＢはゆっくりと移動し，ピストンＢ，Ｃ間の距離が縮まっていった。ばねの長さが $L-2a$ に達した時点でスイッチＫを開いた。このとき領域Ⅰの気体の温度は［ へ ］であり，過程(3)で領域Ⅰの気体が吸収した熱量は［ ト ］である。

問１　(1)から(3)までの過程における領域Ⅰの気体の状態変化の様子を，図２のように体積を横軸に，圧力を縦軸にとり，解答欄にグラフで示せ。グラフ用紙の横軸と縦軸の目盛りの数値は，それぞれ量 Sa と P_0 を１として表している。例えば図中の×印の点は，体積が $4Sa$，圧力が $3P_0$ の状態に対応する。グラフは概略を示すものでよいが，図中の記入例にならって，各過程の始点と終点に黒丸•を，さらに適当な位置に(1)，(2)，(3)の番号を付け，グラフのそれぞれの部分がどの過程を表すかが分かるようにすること。

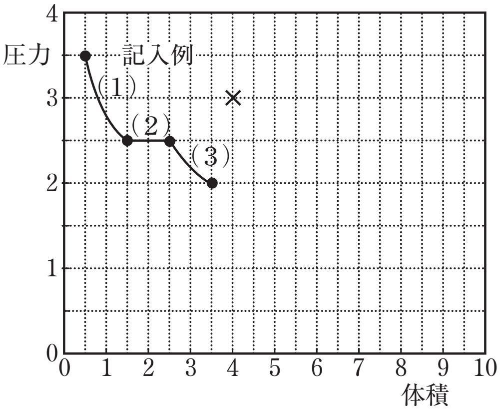


図２

(4)　その後，ピストンＢの弁Ｄを開いたところ，ピストンＢはゆっくりと動き始め，ばねは自然長に戻ったが，ピストンＣはストッパー N_2 に接触したままであった。スイッチＫは開いていたから，この過程は断熱変化である。ばねが自然長に戻ったとき，シリンダー内の気体の温度は［ チ ］であった。また，このときにもピストンＣがストッパー N_2 に接触したままであったことから，ばねの自然長 L と長さ a の間には，$\dfrac{a}{L} \geqq$［ リ ］の関係が成り立っていたことが分かる。

< Note >

第８講　確認テスト

次の文を読んで，[　　　]に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。

単原子分子の理想気体で満たされた容器とピストン付きシリンダーが連結された図１のような装置がある。ピストンは気密性がよく，滑らかに動くことができるものとする。容器，連結部，シリンダー，ピストンともに熱を伝えない材料でできている。また，連結部にある気体の体積は，容器やシリンダーの容積に比べて十分小さくゼロと見なせるものとする。気体定数を R として，この気体の定積モル比熱は $\frac{3}{2}R$ で表せる。

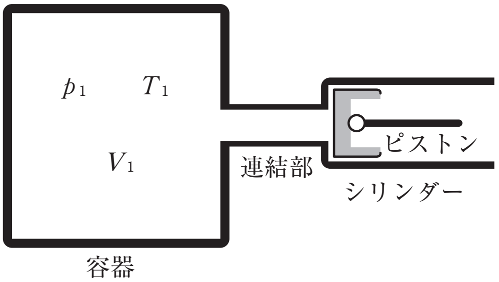


図１

はじめ，図１のように，容積 V_1 の容器内が圧力 p_1，温度 T_1 の理想気体で満たされており，この状態を初期状態と呼ぶ。このとき，ピストンはシリンダーの左端にあってシリンダー内部にある気体の体積はゼロと見なせるものとする。

この場合について，以下の過程Ａおよび過程Ｂを考える。

過程Ａ：

初期状態において容器内にあった気体が，以下に示した(1)式の関係を保ちながら，圧力 p_1 から αp_1（ただし，$0<\alpha<1$）まで断熱的に変化し，その気体の一部が図２に示すようにシリンダー内へ移動した。

$pV^{\frac{5}{3}}=$一定　…………………………………………………………(1)

ただし，p および V はそれぞれ，この過程における気体の圧力および体積を表す。また，気体の移動はゆるやかに起こり，その間，ピストンには常に，容器内の気体の圧力と等しい圧力がかかっているものとする。

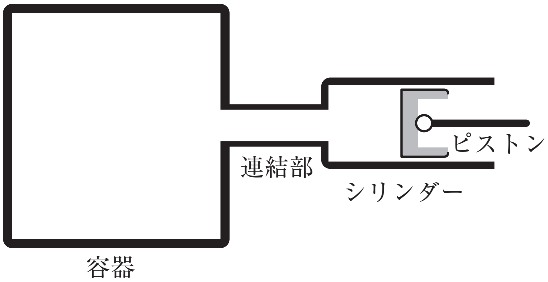


図２

< Note >

初期状態において容器内にあった気体のモル(mol)数は，[ア]と書ける。気体の圧力が αp_1 になった時，気体の温度は[イ]$\times T_1$ になる。この変化によって，系全体の内部エネルギーの初期状態に対する増分は[ウ]$\times p_1 V_1$ になる。ゆえに，移動した気体が外部になした仕事は，熱力学の第１法則に従って，[エ]と求めることができる。また，気体の移動にともなって，シリンダー内の気体の体積は[オ]$\times V_1$ となり，シリンダー内へ移動した気体のモル数は[カ]となる。

過程Ｂ：

過程Ｂでは過程Ａと異なり，初期状態において，細かい穴の多数あいた多孔質体と呼ばれるものが，連結部に詰められている。この多孔質体は，シリンダー側の気体の圧力を常に一定に保つ役割を果たしている。この一定圧力の値を p_2(ただし，$0<p_2<p_1$)とする。

この場合について，気体が外部に対してなす仕事や，移動する気体のモル数を過程Ａの場合と比較してみる。

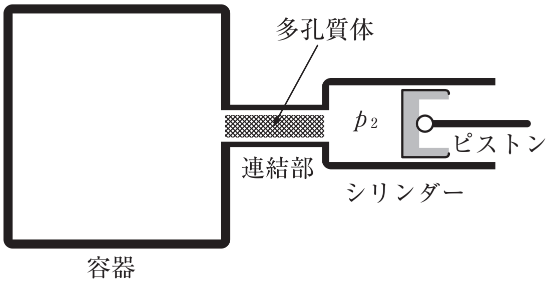


図３

図３のように，はじめ容器内にあった気体の一部はシリンダー側に移動するが，過程Ｂではその間，ピストンには常に，シリンダー内の気体の圧力 p_2 と等しい圧力がかかっているものとする。十分に時間が経過すると，容器内とシリンダー内の気体の温度は等しくなり，容器内の気体の圧力も p_2 に等しくなった。このとき，シリンダー内の気体の体積を V_2 とすれば，気体が外部に対してなした仕事は，[キ]と書ける。過程Ａの場合と同様に，系全体の内部エネルギーの変化を考慮し，熱力学の第１法則を適用すると，シリンダー内の気体の体積，温度を求めることができる。いま，$\beta=\dfrac{p_2}{p_1}$ とすると，この β を用いて，シリンダー内の気体の体積は[ク]$\times V_1$，気体の温度は[ケ]$\times T_1$ と表すことができる。したがって，シリンダー内へ移動した気体のモル数は[コ]となる。

< Note >

第８講　解答

1

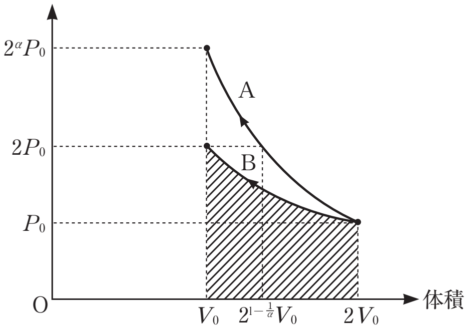
あ　$\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}$　　い　$\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$　　う　$\dfrac{5}{4}P_0V_0$　　え　$\dfrac{1}{2}P_0V_0$　　お　$\dfrac{7}{4}P_0V_0$

か　R　　き　$\dfrac{5}{3}$　　く　$\dfrac{7}{5}$　　け　$2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0$　　こ　$2^{\alpha}P_0$

さ　$2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$　　し　①　　す　②

問１　$Q+2\left(2^{2-\frac{1}{\alpha}}-3\right)P_0V_0$

問２

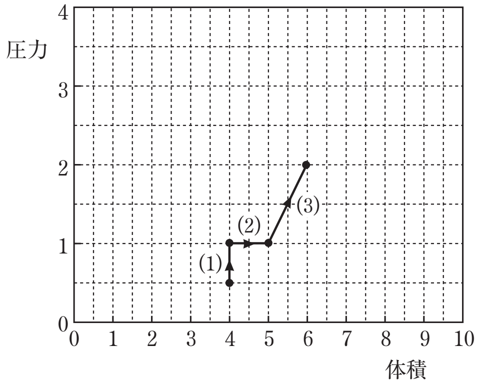


2

イ　$\dfrac{P_0S}{a}$　　ロ　$2T_0$　　ハ　$\dfrac{3P_0Sar}{V^2}$　　ニ　$\dfrac{5}{2}T_0$　　ホ　$\dfrac{5}{2}P_0Sa$

ヘ　$6T_0$　　ト　$12P_0Sa$　　チ　$\dfrac{20}{3}T_0$　　リ　$\dfrac{3}{28}$

問１



第８講　確認テスト

【解答】

1

ア $\dfrac{p_1V_1}{RT_1}$　イ $\alpha^{\frac{2}{5}}$　ウ $-\dfrac{3}{2}\left(1-\alpha^{\frac{2}{5}}\right)$　エ $\dfrac{3}{2}\left(1-\alpha^{\frac{2}{5}}\right)p_1V_1$

オ $\left(\alpha^{-\frac{3}{5}}-1\right)$　カ $\left(1-\alpha^{\frac{3}{5}}\right)\dfrac{p_1V_1}{RT_1}$　キ p_2V_2　ク $\dfrac{3(1-\beta)}{5\beta}$

ケ $\dfrac{2\beta+3}{5}$　コ $\dfrac{3(1-\beta)}{2\beta+3}\cdot\dfrac{p_1V_1}{RT_1}$

【解説】

ア　状態方程式

$$p_1V_1=nRT_1 \quad \cdots① \qquad \therefore \quad n=\frac{p_1V_1}{RT_1}$$

イ　$pV^{\frac{5}{3}}=$一定　を書き直して，$p^{-\frac{2}{5}}\cdot T=$一定

$$p_1^{-\frac{2}{5}}T_1=(\alpha p_1)^{-\frac{2}{5}}\cdot T' \qquad \therefore \quad T'=\alpha^{\frac{2}{5}}\times T_1$$

ウ　$\Delta U_1=\dfrac{3}{2}nR(T'-T_1)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{p_1V_1}{RT_1}\cdot R\left(\alpha^{\frac{2}{5}}T_1-T_1\right)=-\dfrac{3}{2}\left(1-\alpha^{\frac{2}{5}}\right)p_1V_1$

エ　熱力学第１法則より，

$$\underbrace{0}_{\text{断熱}}=\Delta U_1+W_1 \qquad \therefore \quad W_1=-\Delta U_1=\frac{3}{2}\left(1-\alpha^{\frac{2}{5}}\right)p_1V_1$$

オ　$pV^{\frac{5}{3}}=$一定　より，

$$p_1V_1^{\frac{5}{3}}=(\alpha p_1)\cdot V'^{\frac{5}{3}} \qquad \therefore \quad V'=\alpha^{-\frac{3}{5}}V_1$$

よって，シリンダー内の体積は，

$$V'-V_1=\left(\alpha^{-\frac{3}{5}}-1\right)\times V_1$$

カ　$n\times\dfrac{V'-V_1}{V'}=\left(1-\alpha^{\frac{3}{5}}\right)\dfrac{p_1V_1}{RT_1}$

キ　$W_2=p_2V_2$

ク　変化後の状態方程式は　$p_2(V_2+V_1)=nRT_2 \quad \cdots②$

②－①より，

$$nR(T_2-T_1)=p_2V_2+p_2V_1-p_1V_1$$

他方，熱力学第１法則より，

$$0=\Delta U_2+W_2=\frac{3}{2}nR(T_2-T_1)+p_2V_2$$

$$\therefore \quad 0=\frac{3}{2}(p_2V_2+p_2V_1-p_1V_1)+p_2V_2$$

$\beta=\dfrac{p_2}{p_1}$を用いて，

$$V_2=\frac{3(1-\beta)}{5\beta}\times V_1$$

ケ　②÷①より，

$$\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{V_2}{V_1}+1\right)=\frac{T_2}{T_1}\qquad \therefore\ \beta\left\{\frac{3(1-\beta)}{5\beta}+1\right\}=\frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2=\frac{2\beta+3}{5}\times T_1$$

コ　$n\times\dfrac{V_2}{V_1+V_2}=\dfrac{3(1-\beta)}{2\beta+3}\cdot\dfrac{p_1V_1}{RT_1}$